

DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DANS LES CLASSES. EXEMPLES ET QUESTIONS

RENAUD CHORLAY

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ ET INSTITUT SUPÉRIEUR DU
PROFESSORAT ET DE L'ÉDUCATION DE L'ACADÉMIE DE PARIS, SORBONNE
UNIVERSITÉ

Mots clés : *histoire des mathématiques, didactiques des mathématiques, enseignement et apprentissage.*

History of mathematics in the classroom. Examples and questions

Summary: *For 40 years the French IREM network has been producing resources for the use of historical documents in the mathematics classroom. We present and question this practice.*

Key words: *history of mathematics, didactics of mathematics, teaching and learning.*

Introduction

Cet exposé vise à orienter le lecteur vers des documents de natures diverses : documents pour la classe, documents pour la formation des enseignants, articles de recherche en didactique des mathématiques ou sur l'interface entre la didactique et l'histoire. Ces documents portent tous sur une manière d'utiliser dans l'enseignement et la formation des éléments de l'histoire des mathématiques, particulièrement développée en France et qui trouve des échos internationaux. Nous expliciterons certaines caractéristiques de cette approche, ses limites, et les questions qu'elle soulève.

Nous n'aborderons pas deux thèmes importants, mais des thèmes différents : les liens entre l'histoire des mathématiques et la didactique des mathématiques comme domaines de recherche (Chorlay et de Hosson, 2016) ; l'usage de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants des écoles primaires et secondaires.

Les réseaux IREM et HPM

Le réseau des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) a été créé en France à la fin des années 1960, initialement pour assurer la formation des enseignants dans le cadre de la réforme des mathématiques modernes. Le réseau existe toujours, avec un IREM dans chaque académie (i.e. subdivision administrative scolaire en France) : <https://www.univ-irem.fr/>. Ces instituts sont des structures universitaires, dépendant en général des départements de mathématiques, dans lesquelles des universitaires et des enseignants du primaire et du secondaire collaborent sur la base du volontariat en vue de produire des ressources (publications, sites, logiciels) pour l'enseignement et la formation. Ils proposent aussi des stages de formation continue pour les enseignants. À l'échelle nationale, le réseau des IREM publie trois revues : *Repères IREM* (destinée aux enseignants du secondaire), *Grand N* (adressée aux formateurs d'enseignants du primaire) et *Petit x* (destinée aux formateurs d'enseignants du secondaire). Elles sont accessibles en ligne : <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues>.

Les thèmes mathématiques travaillés dans les IREM sont nombreux, et les groupes thématiques de chaque IREM se structurent à l'échelle nationale en commissions inter-IREM : géométrie, informatique, liaison lycée-université, etc. Parmi elles, la commission inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques (CIIEHM) est l'une des plus anciennes, puisqu'elle a été créée au début des années 1980 : <https://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique15>. Cet exposé vise principalement à rendre compte des travaux produits dans le cadre de cette commission.

La CIIEHM s'insère elle-même dans un réseau international de recherches et d'échanges, le History and Pedagogy of Mathematics Study Group : <http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/about%20HPM.htm>. Le HPM Study Group organise des rencontres internationales régulières, soit à l'échelle continentale (HPM Americas, European Summer Universities), soit à l'échelle globale (ICME Satellite Meetings of HPM). Les chercheurs qui travaillent sur les thèmes HPM sont aussi présents dans les grands colloques de didactique des mathématiques, souvent dans des sections thématiques spécifiques : dans le groupe de travail n° 12, History in Mathematics Education, des colloques CERME (Conferences of the European Society for Research in Mathematics Education) : <http://erme.site/cerme-conferences/> ; ainsi que dans les groupes de travail History in Mathematics Education et History of Mathematics Education des conférences ICME organisées par l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) : <https://www.mathunion.org/icmi>.

L'insertion dans les réseaux de recherche en histoire des mathématiques est aussi réelle mais beaucoup moins formelle et institutionnelle. Elle est souvent le reflet de collaborations personnelles entre chercheurs.

Les ressources produites par la CIIEHM : période « classique »

Jusqu'aux années 2010, la CIIEHM a produit de nombreuses brochures, des actes de colloques et plusieurs livres. Certaines publications sont des *sourcebooks* permettant de faire connaître à un large public des textes qui semblent pouvoir servir de matériau pour l'enseignement, sans que le travail d'adaptation didactique soit pris en charge dans la publication. Un bel exemple de *sourcebook* est donné par Chabert (1994). Je m'intéresse ici plutôt aux publications proposant un travail en classe.

Sans nier la variété de ces ressources, soulignons un net air de famille. On reconnaît en effet une même démarche, que l'on lise des documents des années 1980, tels que Fauvel (1990), les bro-

chures du groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris (<https://irem.u-paris.fr/histoire-des-mathematiques-irem-de-paris>), ou les publications préparées à la fin de la décennie 2000 (Barbin, 2010, 2012 ; édition internationale : Barbin, 2018). Voici un exemple. Tous les chapitres de Barbin (2010, 2012) sont construits de la même manière. Un enseignant du secondaire ou un formateur d'enseignants rend compte d'une activité construite pour des classes à partir d'un support historique. Après une brève présentation du contexte, l'enseignant détaille l'activité et les choix qui y ont présidé.

Ainsi, j'étais professeur dans l'enseignement secondaire dans la décennie 2000-2010, et je proposais (Barbin, 2010) le compte rendu d'une séance de deux heures d'introduction au calcul des probabilités que j'avais faite plusieurs fois en classe de lycée (élèves de 15-16 ans). Je faisais lire aux élèves un extrait d'une lettre de Leibniz sur un problème du même type que celui du grand-duc de Toscane :

[...] Prenons un exemple. Deux personnes jouent aux dés : l'un gagnera s'il a encore huit points, l'autre s'il en a cinq. Il s'agit de savoir pour lequel des deux il faudrait plutôt parier. Je dis qu'il faut plutôt parier pour celui qui a besoin de huit points, et même que son avantage comparé avec l'espérance que l'autre doit avoir, est comme de trois à deux. C'est à dire que je pourrais parier trois écus contre deux pour celui qui demande huit points contre l'autre, sans me faire tort. Et si je parie un contre un, j'ai un grand avantage. Il est vrai que non obstant l'apparence je puis perdre ; d'autant que l'apparence de perdre est comme deux et celle de gagner comme trois. Mais dans la suite du temps observant ces règles de l'apparence, et jouant ou pariant souvent, il est constant qu'il se trouvera à la fin, que j'aurai gagné plutôt que perdu.

Mais pour faire voir qu'il y a plus d'apparence pour celui qui a besoin de huit points, en voici la démonstration. Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela étant il est visible qu'il n'y a que deux manières de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4. l'autre 2 et 3. au lieu qu'il y a trois manières pour avoir huit points, savoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manières a en elle-même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour laquelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par conséquent il y a autant d'apparences (égales entre elles), qu'il y a de manières. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manières, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables pour huit.

[...] Cela étant posé, il est visible qu'il faudra suivre l'estime que je viens de faire. C'est à dire que cette maxime fondamentale aura lieu :

L'apparence ou probabilité de l'effect A, garde la même proportion à l'apparence ou probabilité de l'effect B, que le nombre de toutes les manières capables de produire l'effect A garde au nombre de toutes les manières de produire l'effect B, supposant toutes ces manières également faisables.

La séance consistait en deux heures de lecture guidée, avec des questions et des réponses visant à faire la transition entre les statistiques descriptives – déjà connues des élèves (fréquences, moyenne, etc.) – et les probabilités. Il n'y a pas d'objectif d'enseignement de l'histoire des mathématiques (Jankvist, 2009) ; le document historique est un moyen pour permettre :

— Des apprentissages de notions mathématiques : probabilité, équiprobabilité, espérance, jeu équitable.

— Des apprentissages de savoir-faire et de techniques : calcul de l'espérance à partir de la distribution de probabilités, dénombrement systématique, modélisation de l'univers des possibles par un tableau ou un arbre.

— Une sensibilisation à des questions épistémologiques : problématisation de la notion de probabilité, approche fréquentiste et énoncé informel de la loi des grands nombres, pluralité des modélisations par une expérience aléatoire (celle décrite par Leibniz peut être présentée soit par un modèle équiprobabiliste, soit par un modèle non-équiprobabiliste).

Plus généralement, cette approche (Chorlay, 2016) :

— Repose de manière fondamentale sur l'introduction en classe de documents du passé : textes, images, tables numériques, instruments.

— Vise un « dépassement », une confrontation avec du non-familier, afin de susciter un retour réflexif sur du familier.

— Permet de confier aux élèves des tâches de haut niveau cognitif plutôt que des tâches d'application : reformulation, changements de registres et de cadre, contrôle et évaluation.

— S'insère dans l'enseignement de manière relativement marginale. Il ne s'agit pas de reconstruire les curriculums, mais de proposer quelques séances dans l'année.

— Ne vise pas un enseignement de l'histoire des mathématiques, même si un apport d'information semble toujours pertinent.

— Ne repose sur aucune hypothèse de parallélisme entre ontogénie et phylogénie, ni sur aucun concept d'« obstacle épistémologique » (Chorlay et de Hosson, 2016).

Soulignons que cette approche n'est pas uniquement française, ni réservée à l'enseignement secondaire. Aux États-Unis, on développe depuis plusieurs années un projet à large échelle, soutenu par la National Science Foundation, qui vise à produire des modules d'enseignements universitaires s'appuyant principalement sur des sources primaires. C'est le projet TRIUMPHS (Transforming Instruction in Undergraduate Mathematics via Primary Historical Sources, <https://blogs.ursinus.edu/triumphs/>).

Les ressources produites par la CIIEHM : évolutions récentes

On peut dire que cette approche « classique » relève d'une « culture de l'offre » : des collectifs d'experts, d'amateurs éclairés et d'enthousiastes mettent au point des propositions d'enseignement et les diffusent en partageant leurs connaissances, en expliquant leurs motivations et leur choix. Il est apparu que la question de la réception de ces ressources était peu problématisée. Depuis le milieu des années 2010, plusieurs travaux produits dans le cadre ou dans l'esprit de la CIIEHM ont cherché à prendre davantage en compte les deux publics concernés par cette réception : d'une part celui des élèves, et d'autre part celui des enseignants destinataires de ces ressources.

Plusieurs publications récentes cherchent à rendre compte du travail des élèves dans des séances construites autour de documents historiques. Ainsi, j'ai mené deux travaux avec des élèves à la fin de l'école primaire et au début de l'enseignement secondaire (8-11 ans) pour voir si l'étude en classe d'algorithmes numériques anciens pouvait donner lieu à un travail de haut niveau cognitif. Dans Chorlay, Mailloux et Masselin (2017), des élèves ont étudié différents documents présentant des multiplications *per gelosia*. On leur demandait d'identifier la fonction de l'algorithme, de formuler l'algorithme en toute généralité et de le comparer à celui qu'ils connaissaient déjà. Il ne s'agit donc pas d'enseigner la multiplication, mais de permettre un retour réflexif de plus haut niveau. Dans Chorlay (2021), un algorithme de division par 2 tiré du livre de calcul indien d'al-Khwarizmi est montré aux élèves ; à eux de l'exprimer par écrit en toute généralité et de justifier leur correction.

Cette attention aux élèves se retrouve dans la dernière publication de la CIIEHM. Dans *Passerelle* (Moyon et Tournès, 2018), neuf chapitres décrivent des activités à support historique pour les élèves de la fin de l'école primaire : calcul sur abaque, duplication du carré d'après Platon, reproduction de figures complexes issues d'un codex de Léonard de Vinci, etc.

L'attention portée à la réception des ressources par les enseignants est plus récente et encore ténue. Ainsi, un travail récent vise à étudier la réception de ressources non-didactisées telles qu'on les trouve dans les *sourcebooks*. Durant l'année scolaire 2020-2021, cinq enseignants de lycée (élèves de 15 à 18 ans) ont accepté de construire des séances de travail à partir d'une même ressource, un extrait des *Eléments d'algèbre* d'Euler (1774, § 784-787) dans lequel il expose la méthode d'approximation de solutions d'équations numériques présentée initialement par Newton dans sa *Méthode des fluxions*. Dans cet extrait, Euler illustre la méthode en détaillant le calcul d'une valeur approchée de $\sqrt{20}$ (ce qui donne lieu à des calculs numériques exemplifiant les premières boucles d'un algorithme itératif), puis il évoque l'adaptation à des équations polynomiales à paramètres (ce qui conduit à une formulation de l'algorithme itératif via une formule de récurrence à paramètres). Le travail entre le chercheur et les enseignants commence par une séance de découverte du texte, essentiellement consacrée à la compréhension de son contenu mathématique ; aucun choix d'enseignement n'est fait lors de ce premier moment de travail. Les cinq enseignants ont accepté de construire chacun une séance d'enseignement indépendamment les uns des autres. Dans la perspective d'un travail de recherche en didactique sur les pratiques enseignantes, il s'agissait de comparer les choix faits par les enseignants et, si possible, d'identifier des facteurs permettant d'expliquer ces choix. Cette étude utilise des outils d'analyse des pratiques enseignantes qui ne sont pas spécifiques aux séances à support historique, en particulier la double approche didactique et ergonomique (Vandebrouck, 2008) et l'approche documentaire du didactique (Gueudet, Pepin et Trouche, 2013). Elle suit les méthodes de la recherche en didactique des mathématiques, avec des recueils de données de terrain : entretiens avec les enseignants, captation audio ou vidéo des séances en classes, etc.

Ce travail donnera lieu à deux publications de nature distinctes : une publication de recherche en didactique des mathématiques, centrée sur l'analyse des choix des enseignants (Chorlay, 2022) ; un chapitre dans un ouvrage de la CIIEHM consacré à des activités pour la classe dans le cadre des programmes de lycée parus en 2019 (en préparation).

Questions et limites

La richesse de ces publications et l'approfondissement de questions importantes et longtemps négligées ne doit pas donner l'illusion d'un état des lieux entièrement positif et optimiste.

La question de la réception des ressources est encore presque entièrement ouverte :

— Le travail sur Euler et l'usage par des enseignants de ressources non-didactisées de type *sourcebook* (Chorlay, 2022) ouvre des pistes, à la fois par la proposition d'outils théoriques et par les résultats empiriques, en particulier en montrant les différences de comportements entre enseignants novices et experts. Il est à prolonger.

— Très peu de travaux ont porté sur la réception par les enseignants de ressources didactisées, que ce soient des ressources de « haut niveau », comme celles que l'on trouve dans les publications de la CIIEHM, ou des ressources plus courantes que l'on observe dans les manuels scolaires.

— Les livres et les sites ne sont pas tout. L'évolution des pratiques enseignantes passe aussi par la formation, initiale et continue. Les quelques travaux qui existent en didactique des mathématiques

sur l'impact des formations d'enseignants de sciences à l'histoire de leur science sont, nous semble-t-il, encore peu éclairants.

De même, plusieurs types de problèmes se posent, en particulier dans les interactions de la CIIEHM (et plus généralement des membres du HPM Study Group) avec des collectifs et institutions avec lesquels elle aurait vocation à entrer en contact :

- Ces productions sont encore peu connues des enseignants.
- Les liens avec les deux communautés de recherche – celle en histoire des mathématiques, celle en didactique des mathématiques – sont ténus et fluctuants.
- Les liens avec l'institution scolaire – en particulier en ce qui concerne la conception des programmes de l'enseignement secondaire ou les concours de recrutement d'enseignants – sont, eux aussi, ténus et fluctuants.

Références bibliographiques

- BARBIN, E. (éd.) (2010). *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*. Paris : IREM et Adapt-Vuibert.
- (2012). *Les mathématiques éclairées par l'histoire : des arpenteurs aux ingénieurs*. Paris : Vuibert et ADAPT-SNES.
- (2018). *Let History into the Mathematics Classroom*. Cham : Springer International Publishing.
- CHABERT, J.-L. (éd.) (1994). *Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce*. Paris : Berlin.
- CHORLAY, R. (2010). « Quand Leibniz joue aux dés ». In : BARBIN, E. (éd.). *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*. Paris : IREM et Adapt-Vuibert, p. 99-115.
- (2016). « Historical sources in the classroom and their educational effects ». In: RADFORD, L. ; FURINGHETTI, F. ; HAUSBERGER, T. (éd.). *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics (HPM 2016, 18-22 July 2016)*. Montpellier, France : IREM de Montpellier, p. 5-23.
- (2021). « Can students justify the correctness of an arithmetic algorithm? A case-study at the primary-secondary transition ». *Recherche en didactique des mathématiques*, 41 (2), p. 177-216.
- (2022). « From the historical text to the classroom session: Analyzing the work of teachers-as-designers ». *ZDM – Mathematics Education*, 54 (7), p. 1583-1596.
- CHORLAY, R. ; HOSSON, C. de (2016). « History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research ». In: HODGSON, B. ; KUZNIAK, A. ; LAGRANGE, J.-B. (éd.). *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue*. Cham : Springer, p. 155-189.
- CHORLAY, R. ; MAILLOUX, F. ; MASSELIN, B. (2017). « Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par Jalousie ». *Grand N*, 100, p. 33-56. <<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/>> [Consulté le 11 novembre 2021].
- EULER, L. (1774). *Eléments d'algèbre*. Tome 1^{er}. Traduits de l'allemand avec des notes et additions [par Jean Bernoulli]. Lyon : Bruyset Père & Fils. Consultable sur : <gallica.bnf.fr> [Consulté le 11 novembre 2021].
- FAUVEL, J. (éd.) (1990). *History in the Mathematics Classroom – The IREM Papers*. Mathematical Association.
- GUEUDET, G. ; PEPIN, B. ; TROUCHE, L. (2013). « Re-sourcing teachers' work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation ». *ZDM – Mathematics Education*, 45 (7), p. 929-943.
- JANKVIST, U. (2009). « A categorization of “whys” and “hows” of using history in mathematics education ». *Educational Studies in Mathematics*, 71 (3), p. 235-261.
- MOYON, M. ; TOURNES, D. (éd.) (2018). *Passerelles – Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. IREM et ARPEME.
- VANDEBROUK, F. (éd.) (2008). *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès éditions.